

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE ȘI
CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE
INSPECTORATUL ȘCOLAR AL JUDEȚULUI BACĂU
COLEGIUL NAȚIONAL "FERDINAND I" – BACĂU

Concursul Național de Matematică și Fizică
"Vrănceanu – Procopiu"

Ediția a XVII –a, 2015

X

Problema I (10 puncte)

Fie numerele reale a, b, c astfel încât $1 < a < b < c$.

Să se arate că $\log_a(\log_a b) + \log_b(\log_b c) + \log_c(\log_c a) > 0$.

Soluție.

Observăm că dacă $1 < p < q$ și $x > 1$, atunci $\log_p x > \log_q x$, (4p)

Din $1 < a < b < c$, putem scrie că $b = a^u$ și $c = b^v$, cu $u, v > 1$. Se obține imediat și că

$$c = a^{uv}, \text{ sau } a = c^{\frac{1}{uv}}$$

$$\text{Atunci sum dată, } S = \log_a(\log_a b) + \log_b(\log_b c) + \log_c(\log_c a) = \log_a u + \log_b v + \log_c \frac{1}{uv} = (\log_a u - \log_c u) + (\log_b v - \log_c v) \quad (3p)$$

Conform primei observații, fiecare paranteză este strict pozitivă, de unde $S > 0$. (1p)

$$\text{Sau, tot cu prima observație, } S > \log_c(\log_a b) + \log_c(\log_b c) + \log_c(\log_c a) = \\ = \log_c((\log_a b) \cdot (\log_b c) \cdot (\log_c a)) = \log_c 1 = 0 \quad (5p)$$

Problema a II-a (10 puncte)

Fie a, b, c trei numere complexe nenule care verifică egalitățile :

$a(a + b) = r_1$, (1) ; $b(b + c) = r_2$, (2) ; $c(c + a) = r_3$, (3), unde r_1, r_2, r_3 sunt numere reale strict pozitive.

- a) Să se arate că dacă a, b, c sunt trei numere care verifică relațiile date, atunci și $-a, -b, -c$ verifică relațiile (1), (2), (3).
- b) Să se arate că dacă a, b, c verifică relațiile (1), (2), (3), atunci a, b, c sunt toate trei numere reale.

Soluție.

a) Evident, prin înlocuirea valorilor a, b, c cu $-a, -b, -c$. (2p)

b) Presupunem, prin absurd, pentru început, că toate trei numerele $a, b, c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Atunci argumentele lor sunt în intervalele $(0, \pi)$ sau $(\pi, 2\pi)$. Atunci, conform principiului cutiei există două argumente fie în $(0, \pi)$, fie în $(\pi, 2\pi)$. (1p)

Dacă două dintre argumente ar fi în intervalul $(\pi, 2\pi)$, (de exemplu $\arg(a), \arg(b)$), atunci $\arg(-a), \arg(-b) \in (0, \pi)$, iar $-a, -b$ sunt și ele soluții, deci, cel puțin două din argumentele numerelor a, b, c se află în intervalul $(0, \pi)$. (2p)

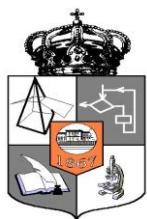
Folosind reprezentarea geometrică a numerelor complexe, observăm că argumentul sumei a două numere complexe se află între argumentele termenilor sumei. (2p)

Atunci $\arg(a), \arg(b), \arg(a+b) \in (0, \pi)$, deci $\arg(a(a+b)) \in (0, 2\pi)$, fals, deoarece $a(a+b)$ este real.

Deci cel puțin unul din numerele a, b, c este real. (2p)

Dar, dacă $a \in \mathbb{R}$, atunci și $a+b \in \mathbb{R}$, deci $b \in \mathbb{R}$. Apoi, din $b(b+c) \in \mathbb{R}$ și $b \in \mathbb{R}$, avem $b+c \in \mathbb{R}$, deci și $c \in \mathbb{R}$.

Deci toate cele trei numere sunt reale. (1p)



**MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE ȘI
CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE**
INSPECTORATUL ȘCOLAR AL JUDEȚULUI BACĂU
COLEGIUL NAȚIONAL “FERDINAND I” – BACĂU

Concursul Național de Matematică și Fizică
“Vrănceanu – Procopiu”
Ediția a XVII –a, 2015

X

